



*Vers la combinatoire*

*Libres recherches et créations mathématiques n° 11*

*Avec un jeu de cartes*

*Ensembles... et relations... par E. Lèmery*

Paraît sous la responsabilité juridique  
de l'ICEM-Pédagogie FREINET - Président F. Deléam  
*Responsable de la rédaction* : M.-E. Bertrand  
Loi n° 49-956 du 16 Juillet 1949  
sur les publications destinées à la jeunesse

*Membres du comité* : M.-E. Bertrand - M. Menusan - R. Poitrenaud  
Printed in France by Imp. CEL - Cannes-La Bocca  
Dépôt légal : 1<sup>er</sup> trimestre 1972  
n° édition : 380 - n° d'impression : 1 989  
Prix du numéro simple : 1,80 F

# SOMMAIRE

## ● 1<sup>re</sup> partie :

- *Une machine qui montre toutes les cartes* page 1  
Bruno TIPLE (6<sup>e</sup>3 - Chamalières)
- *Une représentation du jeu de 32 cartes...* pages 2-3  
Michèle FOREST  
Jean-Pierre SCHLOTTERBECK  
(6<sup>e</sup>3 - CES - Chamalières)

## ● 2<sup>e</sup> partie :

- *Avec 16 cartes...* pages 4 à 8  
Thierry BOISBINEUF  
Bruno RIBÉMONT  
Jacques TOUTAIN  
(6<sup>e</sup>2 - CES du Ronceray - Le Mans)

## ● 3<sup>e</sup> partie :

- *Tirer deux cartes !...*  
parmi 4 cartes Jean-Yves URIEN pages 10 à 13  
Georges FRAMIT  
Françoise PILEYRE  
(6<sup>e</sup>3 - CES - Chamalières)
- parmi 5 cartes Françoise PILEYRE page 14
- parmi 6 cartes » » page 15
- *Avec des rectangles... prendre 2 éléments*  
Françoise PILEYRE pages 16-17
- *Un premier bilan* page 18
- *Prendre 3, 4, 5 cartes...* page 19
- *Un second bilan* pages 20-21

## ● Commentaires destinés au professeur

pages 23-24

Photo BERTELOOT : p. 9.

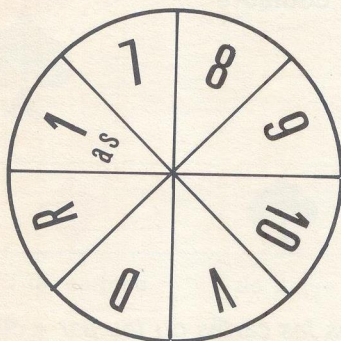
Photo LÈMERY : p. 11, 13, 14 et 15.

# 1<sup>ère</sup> partie

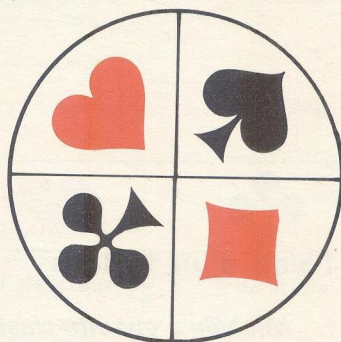
## Une machine qui montre toutes les cartes d'un jeu

*Bruno a créé une « machine » à 2 disques qui donnent, en tournant, toutes les cartes d'un jeu de 32. Elle est facile à construire...*

Voici les 2 disques qui tournent :

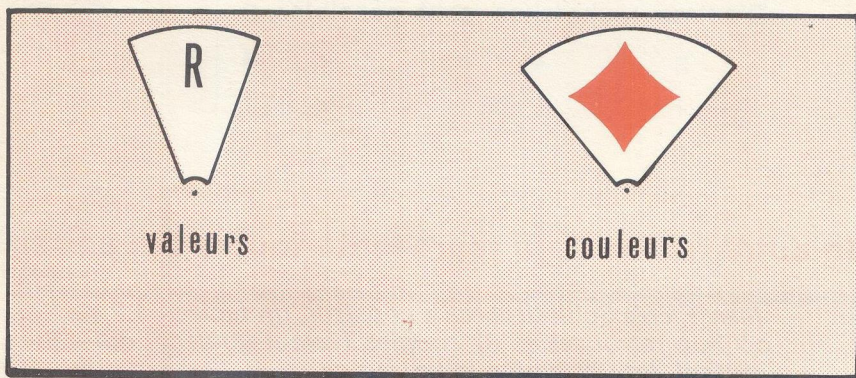


le disque des valeurs



le disque des couleurs

Voici le couvercle avec ses 2 fenêtres :



On lit : « Roi de carreau ».

Chaque valeur peut être « associée » à une couleur.

Essaie...

## Une représentation du jeu de 32 cartes

- avec des flèches

*Michèle FOREST a représenté toutes les « associations » possibles avec des flèches allant d'un ensemble vers l'autre.*

l'ensemble des valeurs

l'ensemble des couleurs



- à l'aide d'un tableau

*Michèle a ensuite classé toutes les cartes du jeu par « couleurs ». (les cartes d'une même couleur sont ensemble).*

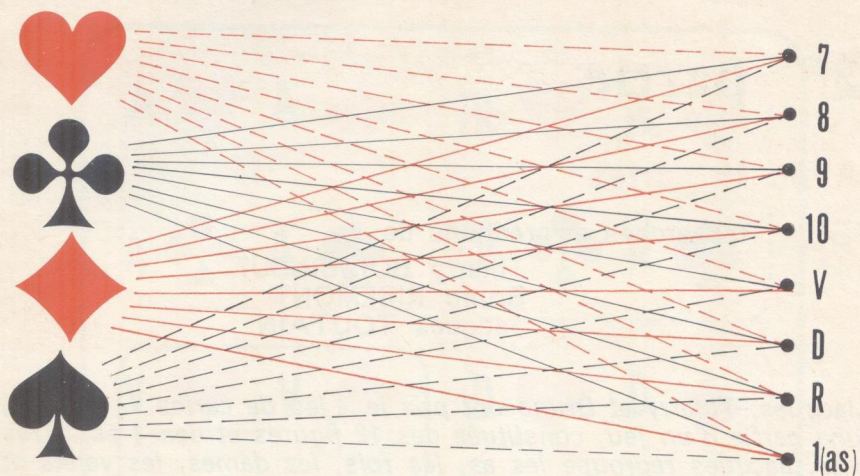
D'autres recherches sont possibles...



## Un autre tableau qui représente toutes les cartes

*Jean-Pierre Schlotterbeck a construit un tableau à 2 entrées où l'on retrouve les 32 couples (valeur-couleur) qui représentent les 32 cartes d'un jeu.*





| 7 de carreau | 7 de pique | 7 de cœur | 7 de trèfle |
|--------------|------------|-----------|-------------|
| 8 »          | 8 »        | 8 »       | 8 »         |
| 9 »          | 9 »        | 9 »       | 9 »         |
| 10 »         | 10 »       | 10 »      | 10 »        |
| V »          | V »        | V »       | V »         |
| D »          | D »        | D »       | D »         |
| R »          | R »        | R »       | R »         |
| 1 (as) »     | 1 (as) »   | 1 (as) »  | 1 (as) »    |

| valeurs<br>couleurs | 1 | R | D | V |
|---------------------|---|---|---|---|
|                     | • | • | • | • |
|                     | • | • | • | • |
|                     | • | • | • | • |

on lit ici :

## 2<sup>ème</sup> partie

### Avec 16 cartes

Recherches et créations de

Thierry BOISBINEUF

Bruno RIBÉMONT

Jacques TOUTAIN

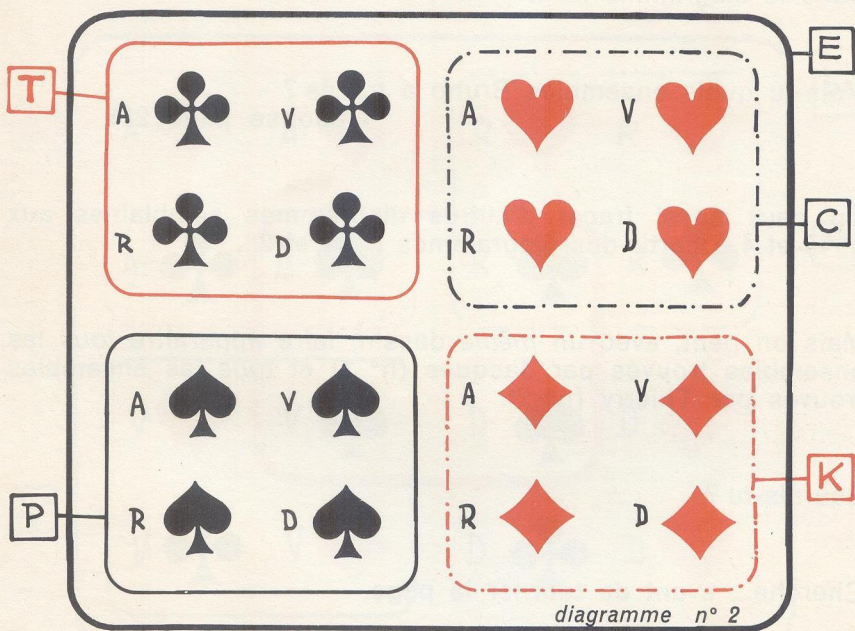
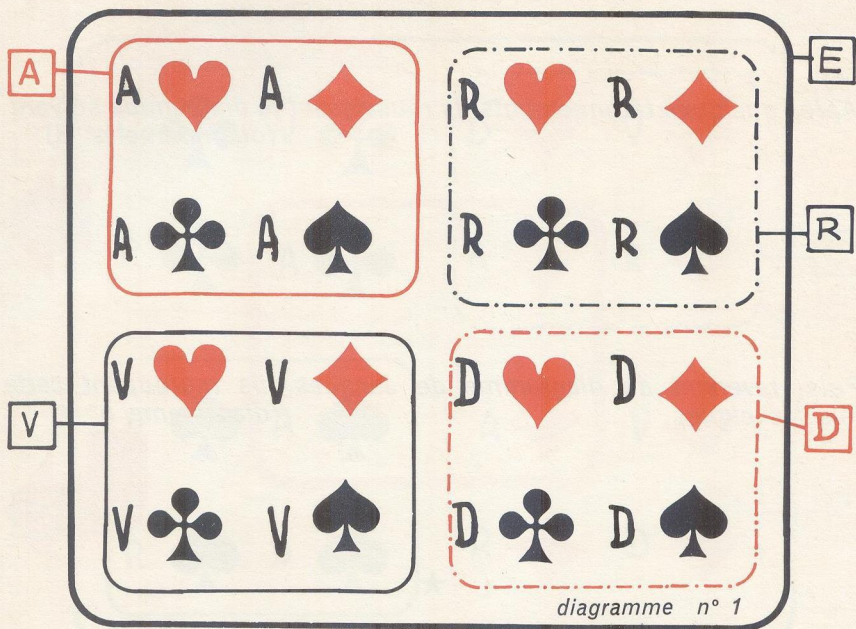
*Jacques, Thierry et Bruno ont pris le « jeu de cartes ». (En fait, une partie d'un jeu, constituée des 12 figures et des 4 as). Très vite, Jacques regroupe les as, les rois, les dames, les valets et propose le diagramme n° 1.*



*Immédiatement, Thierry dispose autrement ses cartes et trace une nouvelle « partition » (diagramme n° 2).*



*Je les encourage alors à essayer des représentations utilisant à la fois les « ensembles » découverts par Jacques et ceux découverts par Thierry. (Gérard Mouy)*



Après quelques tâtonnements ils réussissent le diagramme suivant.  
(diagramme n° 3)



Puis, revenant au diagramme de Jacques, ils regroupent cette fois les piques.



Bruno a remarqué que dans le diagramme n° 3, on peut encore tracer deux autres ensembles, mais que ce n'est plus possible dans le diagramme n° 4.

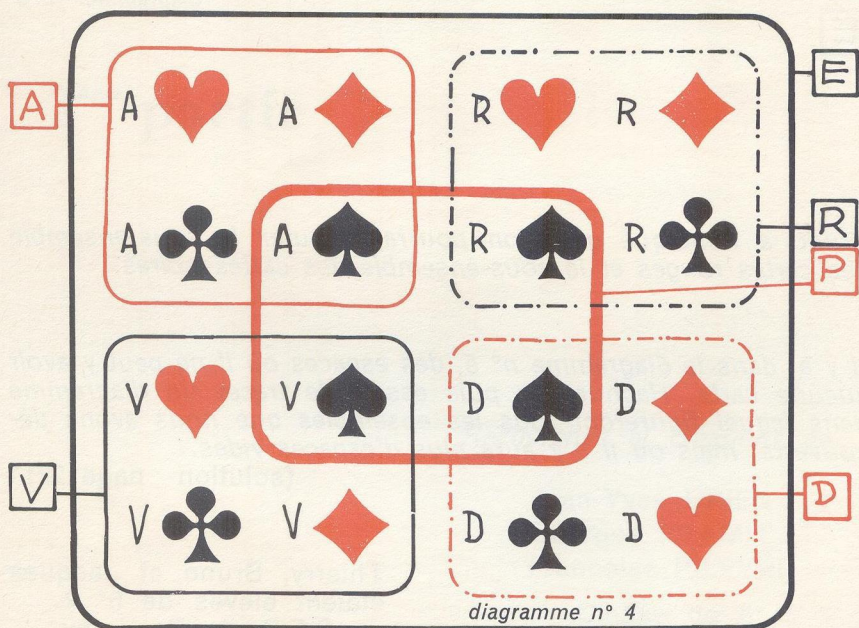
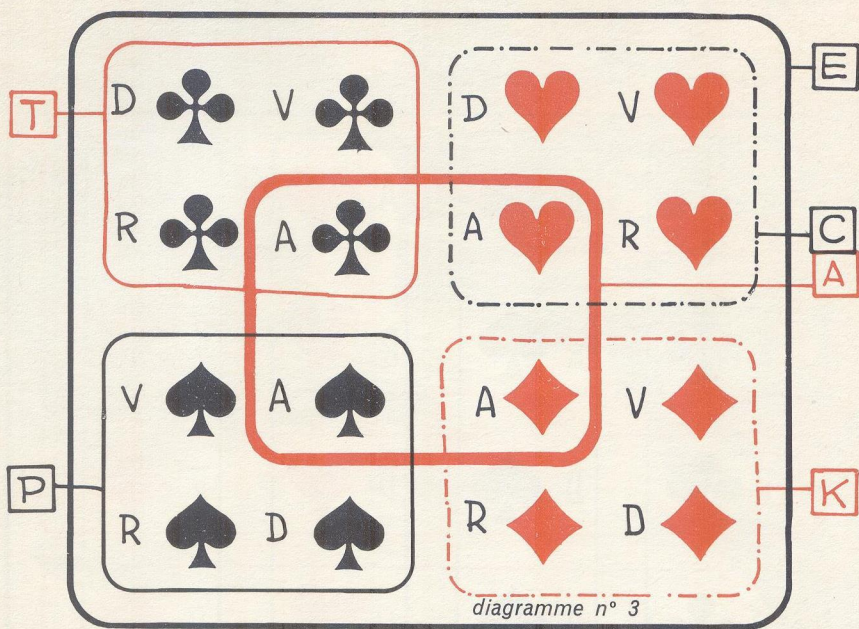
Vois-tu quels ensembles Bruno a tracés ?  
(réponse page 22)

Tu peux aussi tracer d'autres diagrammes semblables aux n°s 3 et 4 à partir des diagrammes n°s 1 et 2...

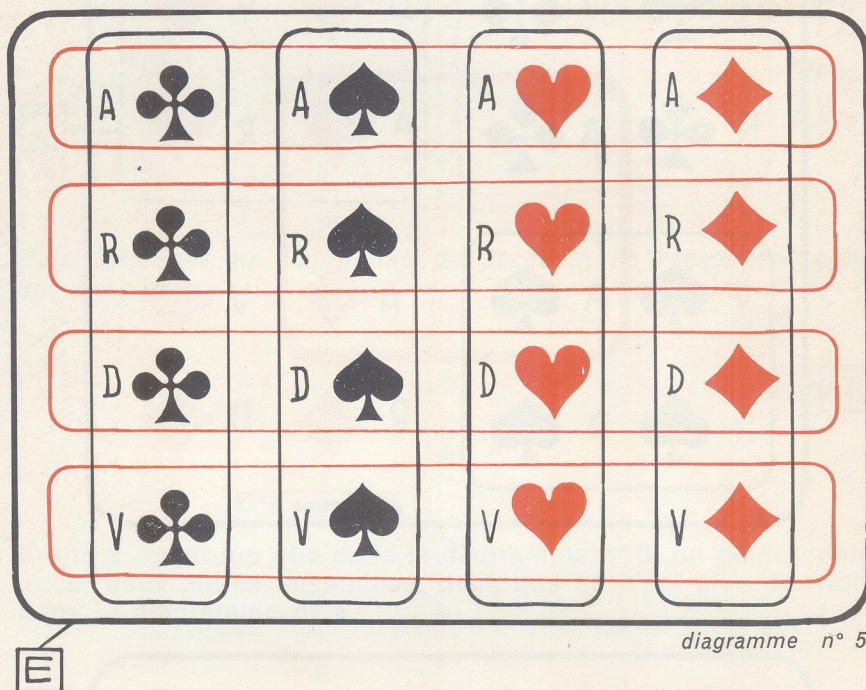
Mais on peut, avec un *même* dessin, faire apparaître *tous* les ensembles trouvés par Jacques (n° 1) et *tous* les ensembles trouvés par Thierry (n° 2).

Saurais-tu ?

Cherche... avant de tourner la page.



Voici maintenant ce que Jacques, Thierry et Bruno ont trouvé :



Bruno a remarqué que l'on pourrait ajouter le sous-ensemble des cartes rouges et le sous-ensemble des cartes noires.

Il y a, dans le diagramme n° 5, des espaces où il ne peut y avoir aucune carte. Hachure-les puis essaie de tracer un diagramme dans lequel figureront tous les ensembles que nous avons découverts, mais où il n'y aura plus d'espaces vides.

(solution page 22)

Thierry, Bruno et Jacques  
étaient élèves de 6<sup>e</sup> 2  
au C.E.S. du Ronceray  
Le Mans (Sarthe)



## 3<sup>ème</sup> partie

**Tirer des cartes !...**

*Recherches et créations de :*

Jean-Yves URIEN  
Georges FRAMIT  
Françoise PILEYRE

Classe de 6<sup>e</sup> 5  
C.E.S. de Chamalières  
(Puy-de-Dôme)

## Tirer 2 cartes

### Avec 4 cartes

Prenez 4 cartes d'un jeu de 32 (les quatre as par exemple). Voici les symboles que nous employons :

l'as de cœur 

l'as de carreau 

l'as de trèfle 

l'as de pique 



Après les avoir retournés, tirez 2 cartes.

Vous avez peut-être tiré : l'as de cœur et l'as de carreau  
ou bien l'as de cœur et l'as de pique...

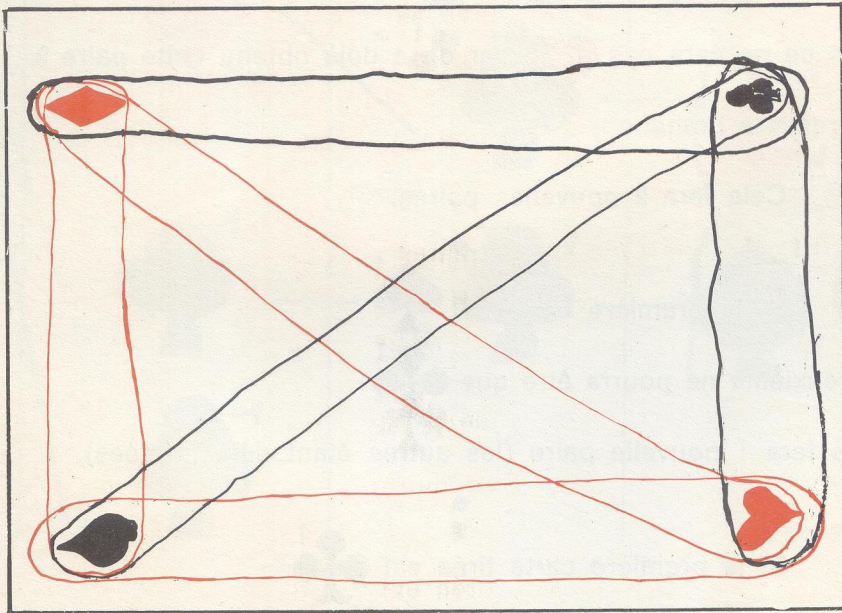
Ce que nous écrivons ainsi :

$\{\text{cœur}^1 \text{ carreau}^1\}$  ou  $\{\text{cœur}^1 \text{ trèfle}^1\}$  ou  $\{\text{cœur}^1 \text{ pique}^1\}$  ou... ou...

**Quelles sont toutes les possibilités ??**

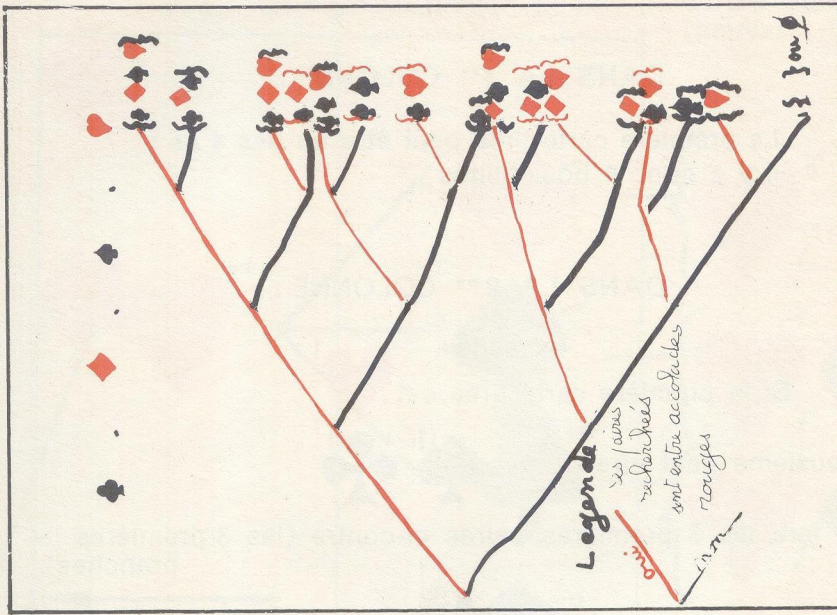
Nous avons cherché toutes les possibilités avec les « représentations mathématiques » suivantes.

(pages 11 à 13)



Document n° 1

Le diagramme de Jean-Yves URIEN



Document n° 2

L'arbre utilisé par Georges FRAMIT

## Un autre arbre créé par Françoise

### DANS LA 1<sup>re</sup> COLONNE :

La première carte tirée peut être un des 4 as ;  
il y a donc 4 possibilités

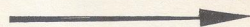


### DANS LA 2<sup>me</sup> COLONNE :



Si la première carte tirée est   
la deuxième peut être     
Cela fera les 3 premières paires ci-contre (les 3 premières branches).

•



Si la première carte tirée est   
la deuxième peut être    
mais ce ne sera pas  car on a déjà obtenu cette paire à  
la première branche

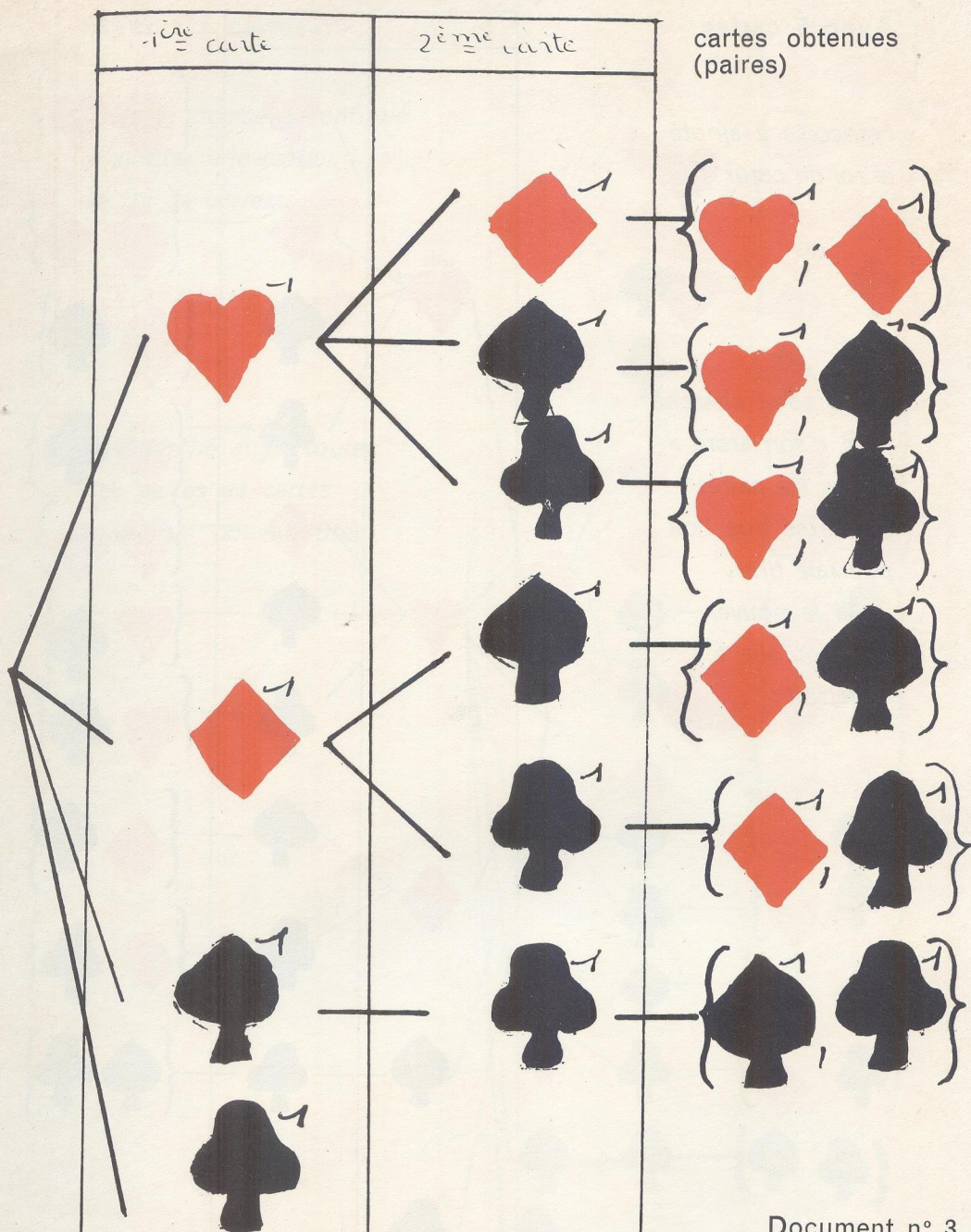
Cela fera 2 nouvelles paires.

•

Si la première carte est   
la deuxième ne pourra être que   
Cela fera 1 nouvelle paire (les autres étant déjà formées).

•

Si la première carte tirée est   
il n'y aura pas de nouvelles paires (déjà tirées).



Document n° 3

Il y a 6 cas possibles avec 4 as.

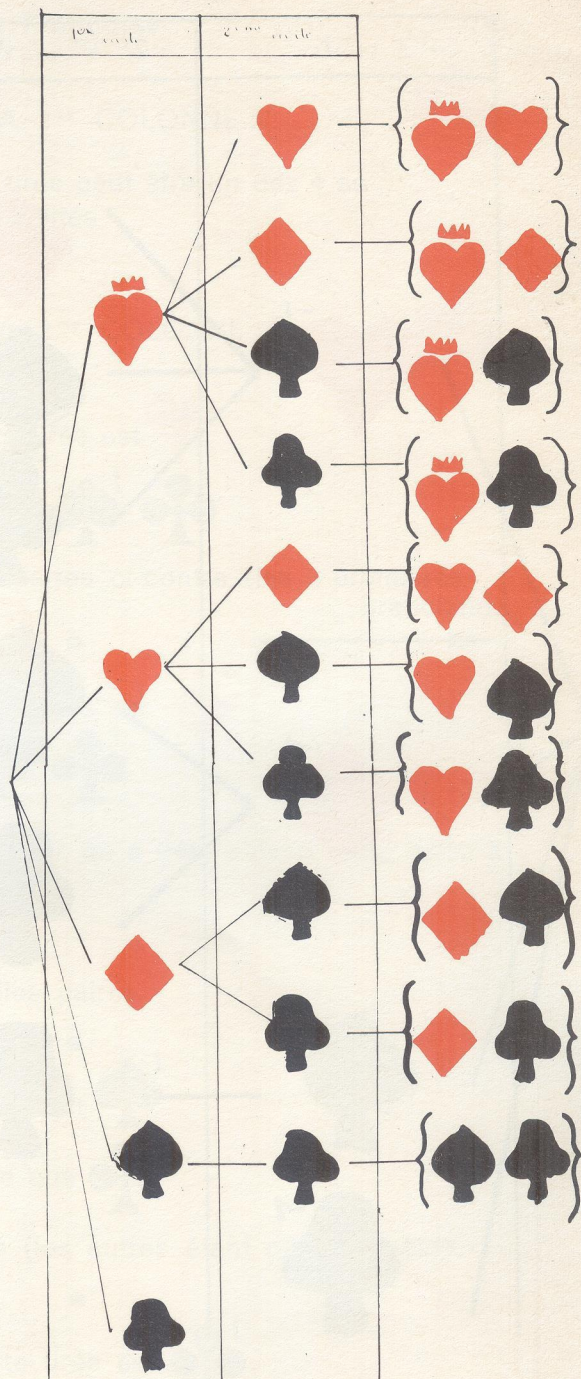
## Avec 5 cartes

Françoise a ajouté  
le roi de cœur  R

ou



aux 4 as et cherché  
avec « son arbre »  
toutes les paires  
de cartes que l'on  
pourrait tirer.  
Voici le nouvel  
arbre qu'elle a  
construit :



Avec 5 cartes on a 10 paires possibles

$$-J^{\text{sc}}(\omega)_2$$


The diagram illustrates the construction of a 1024-card deck from 10 suits. It shows a branching structure where each suit is paired with a trump suit to form a new suit. The process starts with a single suit (clubs) and branches out to 2 suits (clubs, diamonds), then 4 suits (clubs, diamonds, hearts, spades), and finally 10 suits (clubs, diamonds, hearts, spades, and five trumps). The diagram shows how the number of cards doubles at each step, resulting in 1024 cards in total.

15

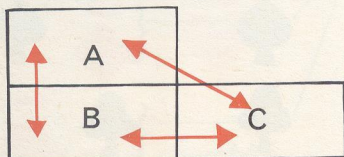
## Prendre 2 rectangles

Françoise entreprend une recherche semblable sur des rectangles qu'elle désigne par des lettres A, B, C... etc

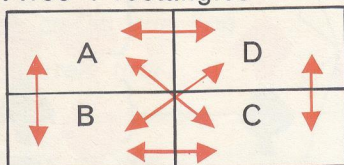
Chaque paire est rendue apparente par 



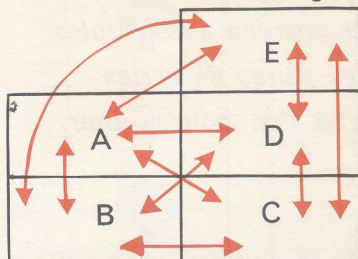
Avec 3 rectangles



Avec 4 rectangles



Avec 5 rectangles

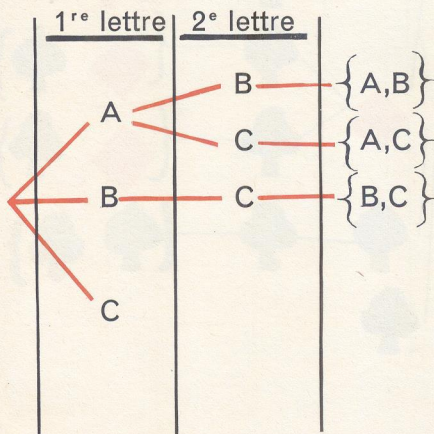


Puis elle utilise « son arbre » pour vérifier et continuer.

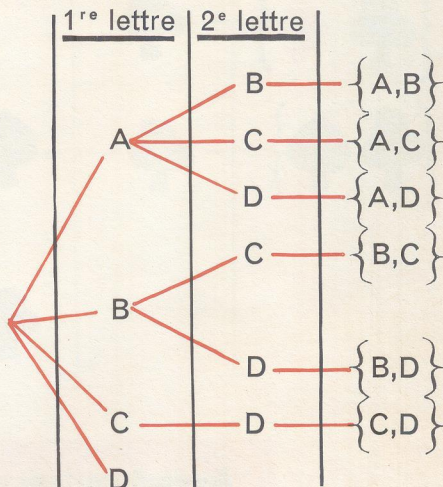


Voici des arbres pour trouver toutes les paires possibles :

$\{A, B, C\}$

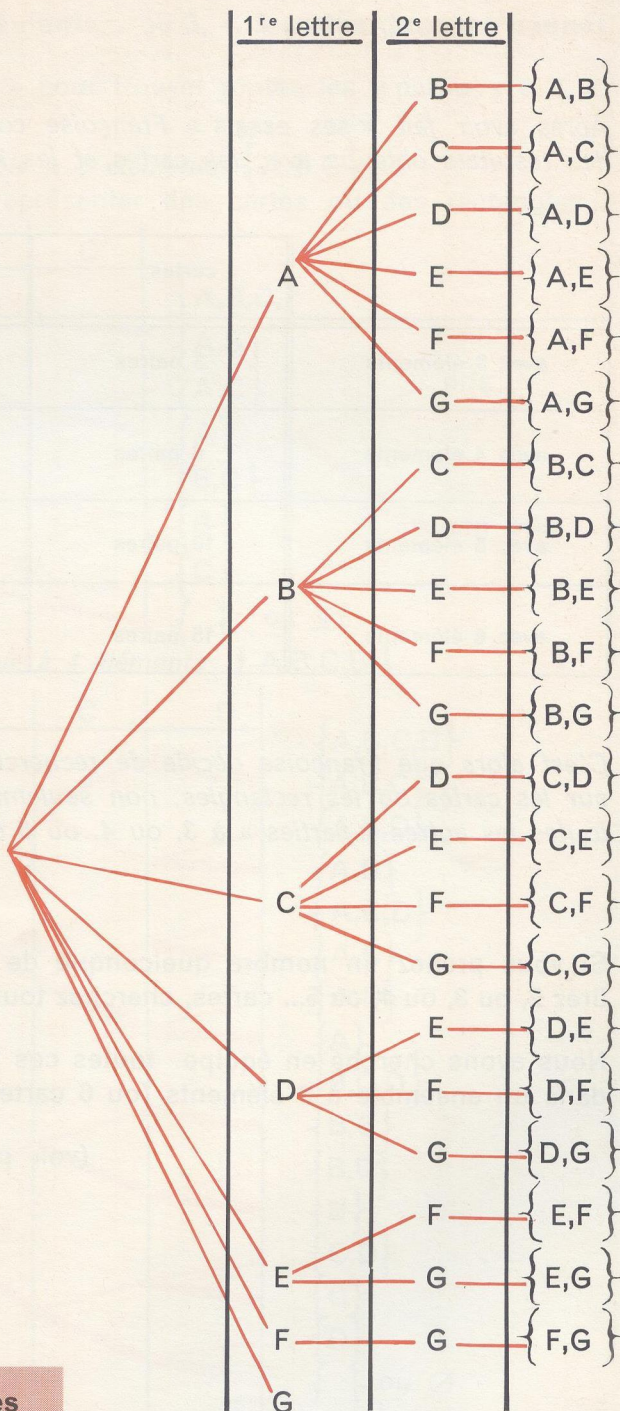


$\{A, B, C, D\}$



Avec 7 éléments

{ A,B,C,D,E,F,G }



21 paires possibles

## Un premier bilan

*Après avoir fait « ses essais » Françoise construit un tableau des résultats obtenus avec les cartes et les rectangles.*

|                 | cartes    | rectangles |
|-----------------|-----------|------------|
| avec 3 éléments | 3 paires  | 3 paires   |
| avec 4 éléments | 6 paires  | 6 paires   |
| avec 5 éléments | 10 paires | 10 paires  |
| avec 6 éléments | 15 paires | 15 paires  |

*C'est alors que Françoise décide de rechercher et de compter, sur les cartes ou les rectangles, non seulement les paires mais toutes les autres « parties » à 3, ou 4, ou 5 éléments...*

Si vous prenez un nombre quelconque de cartes et si vous tirez 2, ou 3, ou 4, ou 5... cartes, cherchez toutes les possibilités.

Nous avons cherché en équipe toutes ces possibilités jusque dans un ensemble à 6 éléments (ou 6 cartes)

(voir pages 19, 20, 21)

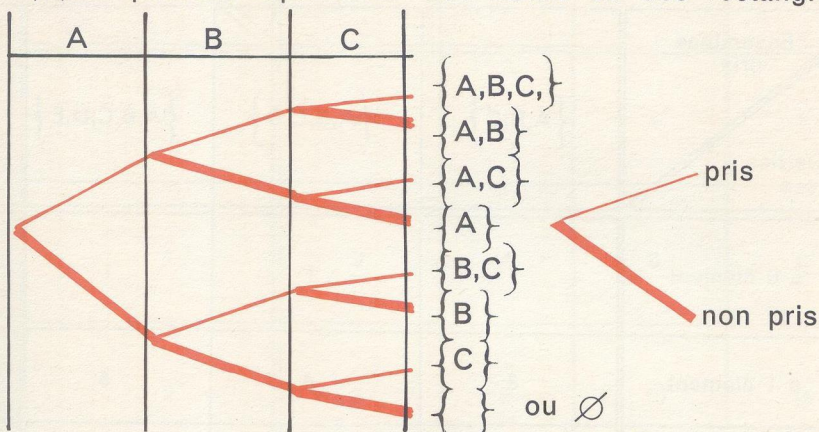
Vous pouvez continuer !...

## Prendre 3, 4, 5 éléments... ou 3, 4, 5 cartes dans un paquet

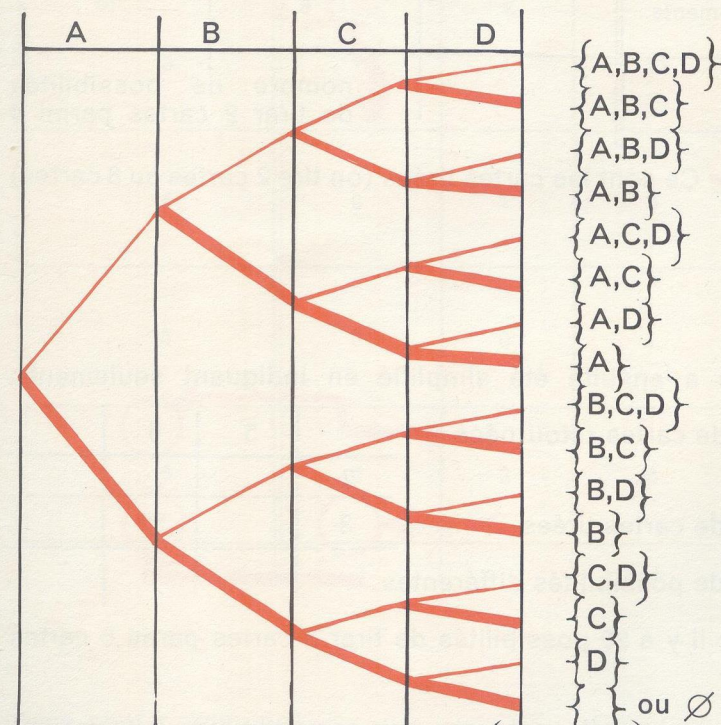
Voici des « arbres » pour trouver toutes les « parties » à 3, 4, 5 éléments...

● Dans un ensemble à 3 éléments  $\{A, B, C\}$

A, B, C... peuvent représenter des cartes ou des rectangles...



● Dans un ensemble à 4 éléments  $\{A, B, C, D\}$



● Dans un ensemble à 5 éléments  $\{A, B, C, D, E\}$  Essayez !...

## Un second bilan

Après toutes ces recherches, Françoise a construit un nouveau tableau des résultats obtenus, en comptant les différentes parties dans chaque ensemble choisi.

 Ce sont les paquets de cartes prises dans le jeu que l'on retourne

| Ensembles pris<br>« Parties » tirées | $\{A,B,C\}$ | $\{A,B,C,D\}$ | $\{A,B,C,D,E\}$ |
|--------------------------------------|-------------|---------------|-----------------|
| à 0 élément                          | 1           | 1             | 1               |
| à 1 élément                          | 3           | 4             | 5               |
| à 2 éléments                         | 3           | 6             | 10              |

 nombre de possibilités de tirer 2 cartes parmi 4

 Ce sont les cartes tirées (on tire 2 cartes ou 3 cartes)

Ce tableau a ensuite été simplifié en indiquant seulement :

le nombre de cartes retournées

|  |   |   |
|--|---|---|
|  | 5 | 6 |
|--|---|---|

le nombre de cartes tirées

|   |  |    |
|---|--|----|
| 2 |  |    |
| 3 |  | 20 |

le nombre de possibilités différentes

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
|--|--|--|

EXEMPLE : il y a 20 possibilités de tirer 3 cartes parmi 6 cartes retournées.

*Vous pouvez faire cette recherche puis comparer avec le tableau de Françoise (page 21).*

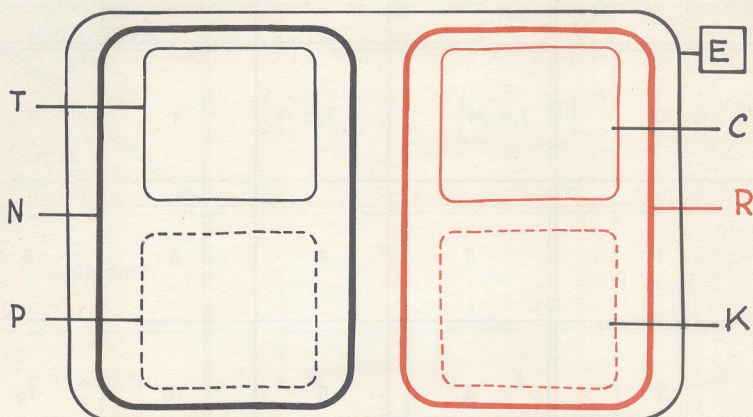
| <div> <div>Cartes<br/>tirées</div> <div> <div>Cartes<br/>retournées</div> <div></div> </div> </div> | 3 | 4 | 5  | 6  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|----|----|
| 0                                                                                                   | 1 | 1 | 1  | 1  |
| 1                                                                                                   | 3 | 4 | 5  | 6  |
| 2                                                                                                   | 3 | 6 | 10 | 15 |
| 3                                                                                                   | 1 | 4 | 10 | 20 |
| 4                                                                                                   | 0 | 1 | 5  | 15 |
| 5                                                                                                   | 0 | 0 | 1  | 6  |
| 6                                                                                                   | 0 | 0 | 0  | 1  |

Cela peut continuer !...

## Avec 16 cartes...

### RÉPONSES AUX QUESTIONS POSÉES

page 6 - Bruno a tracé le diagramme suivant :



faisant apparaître le sous-ensemble R des cartes rouges et le sous-ensemble N des cartes noires.

page 8 - Voici le diagramme... sans espaces vides.

| Noires  |        | Rouges |          |        |
|---------|--------|--------|----------|--------|
|         |        |        |          | As     |
|         |        |        |          | Rois   |
|         |        |        |          | Dames  |
|         |        |        |          | Valets |
| Trèfles | Piques | Cœurs  | Carreaux |        |

## Commentaires destinés au professeur

Ce SBT regroupe quelques recherches libres nées dans nos classes de 6<sup>e</sup> avec l'introduction d'un jeu de cartes apporté souvent par des enfants, recherches inachevées qui peuvent déclencher chez le lecteur l'envie de les poursuivre ou de les refaire.

Rappelons aussi que sont reproduits ici des documents authentiques, révélateurs du processus naturel de construction des concepts mathématiques par tâtonnement expérimental ; c'est pourquoi s'y côtoient divers modes d'expression des créations :

- constructions mécaniques (machines ou dispositifs)
- dessins et représentations (diagrammes, tableaux, arbres...)

et peu de texte. En effet, la logique de l'explication diffère nettement de celle de la découverte et souvent l'enfant ne peut exprimer à l'aide de mots des notions qu'il a pourtant conçues.

Aussi, certaines recherches n'ont pas encore abouti à une formalisation qu'on aurait tort d'exiger trop tôt (répétons que la formation d'un concept suppose une familiarité avec un assez grand nombre de situations d'où il est abstrait naturellement par chacun lorsque la maturation le permet).

## Un bilan...

Si nous essayons de recenser les concepts approchés dans ces « situations » apportées par les enfants, nous y découvrons :

### • Le produit cartésien

ensemble des couleurs  
ensemble des valeurs

qui apparaît très vite lors de l'identification de chaque carte (le couple valeur-couleur) sous divers aspects :

machine à 2 disques  
représentations sagittales, tableaux... (p. 1 à 3)

### • L'inclusion, l'intersection

Les représentations diagrammatiques (pages 4 à 8) ont été faites au début de l'année scolaire, en deux séances (l'heure dédoublée d'atelier mathématique) par ces 3 élèves groupés en équipe, disposant alors seulement des notions d'*ensemble* et d'*élément*...

Celles-ci sont donc des premières approches naturelles de l'inclusion, de l'intersection... non abordées encore en classe à ce moment-là.

### • Partitions et relations d'équivalence liées

Ces partitions sont très souvent naturelles pendant les « classifications ». Ici apparaissent les classes de couleurs, de valeur... mais d'autres sont possibles.

### • La notion de « partie » et l'ensemble des parties d'un ensemble : $\mathcal{P}(E)$

avec la recherche des paires

des sous-ensembles à 3, à 4... éléments...

### • La notion de combinaison

Elle se construit pendant les 3 recherches de Françoise dans l'écriture des sous-ensembles à  $p$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments

(combinaisons de  $n$  objets  $p$  à  $p$ )  
(p. 10 à 21)

## ● L'approche d'une loi de dénombrement

Elle s'amorce avec la création très naturelle du Triangle de Pascal lorsque naît le besoin d'organiser les observations numériques (page 21)

Celui-ci donne déjà les valeurs de  $C_n^p$

et peut conduire à la découverte de la propriété résumée par la formule connue

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

lorsque viendra une réflexion plus analytique du tableau qui sera à l'origine d'une exploration logique de ce qui aura été vécu.

La combinatoire constitue un domaine privilégié car il est de ceux où s'orientent naturellement enfants et adolescents. Elle permet à leur puissance créatrice de s'exercer (de prochains livrets apporteront d'autres témoignages à ce sujet).

## Les tâtonnements de Françoise

- La recherche de Françoise (p. 12 et suivantes) débute par une réflexion constructive pour répondre à un problème naturel de dénombrement :  
« on pourrait rechercher toutes les possibilités » (p. 10)

Pour répondre elle crée un diagramme en arbre qui est un bon idéogramme, c'est-à-dire un outil de recherche logique. Celui-ci n'est pas né spontanément mais il est le fruit de tâtonnements « au brouillon » au cours desquels Françoise a essayé d'appliquer un modèle mathématique déjà connu d'elle et intégré, en tenant compte de la critique des faits qu'elle recevait à chaque essai : l'arbre dichotomique de l'ensemble des parties construit dans d'autres situations, utilisé d'ailleurs par un membre de l'équipe (page 11).

Cette phase nous révèle ici un aspect de ce facteur essentiel dans la construction conceptuelle mathématique qu'est la *mathématisation* :

- un modèle a été construit dans d'autres situations
- on cherche à l'appliquer. « Tout acte réussi laisse une trace dans l'organisme vivant », disait C. Freinet.
- s'il ne s'applique pas, on l'améliore ou on en fabrique un autre.

- Est-ce le besoin d'assurer cette conquête par la répétition ou celui d'assurer sa puissance en faisant varier ?

Toujours est-il que Françoise reprend d'une manière systématique, « son arbre » en faisant varier un paramètre : le nombre d'éléments  $n$  combinés 2 à 2 (pages 14-15), puis abandonnant les cartes à jouer, elle retrouve quelques jours plus tard une « autre situation », qui nous paraît parfaitement similaire, avec des rectangles puis leurs symboles (pages 16-17), mais l'était-elle pour elle ?

Le 1<sup>er</sup> bilan qu'elle dresse alors « sur mon intervention » (page 18) le lui confirme. Le principe de variabilité mathématique qu'elle a naturellement appliqué avec succès dans cette seconde phase de ses recherches, ayant étendu son champ d'exploration, elle l'utilise à nouveau — consciemment cette fois-ci — dans une troisième phase où elle fait varier le second paramètre : le nombre d'éléments  $p$  de chaque combinaison. Ceci lui permet alors de faire un 2<sup>e</sup> bilan qu'elle organise seule en deux étapes, créant ainsi partiellement le *Triangle de Pascal*.

G. MOUY - E. LEMERY

# libre recherche

Cette brochure S.B.T. n° 317 prolonge la série déjà publiée :

## Libres recherches et créations mathématiques

Ont déjà paru dans cette collection :

1. Représentation des observations
2. Vers les espaces vectoriels (1)
3. Vers les espaces vectoriels (2)
4. Les transformations (1)
5. Les correspondances en géométrie
6. Tables numériques
7. Les transformations (2)
8. Numération non décimale
9. Les transformations (3)
10. Vers le barycentre

Chaque livret ..... 1,80 F

## Pour une mathématique vivante

Recueil d'expériences vécues au niveau 6°.

Un fichier à l'usage des professeurs comprenant :

- Des fiches « situations » sur les thèmes mathématiques suivants : ensembles - relations - numération - mesure - repérage - construction des nombres relatifs. Dans ces fiches sont relatées et commentées des situations vécues avec indications des exploitations possibles.
- Des fiches « inventaires » qui recensent les recherches d'adolescents (recherches libres ou guidées) sur un même thème ou un même concept.

48 fiches cartonnées sous pochette-classeur ..... 9,00 F

## Les boîtes " mathématiques " C.E.L.

Pour le 1<sup>er</sup> cycle (de la 6° à la 3°)

- Boîte 1 - Machines à transformer, repérage dans le plan (du matériel pour 12 ateliers) ..... 36,00 F
- Boîte 2 - Numérations non décimales, bouliers universels, balances, symétries (12 à 13 ateliers) ... 54,00 F
- Boîte 3 - Isométries, permutations, figures logiques, circuits logiques (8 ateliers) ..... 60,00 F

En vente à C.E.L. BP 282 - 06, CANNES - CCP Marseille 115.03

# MATHEMATIQUE